

Osnovne vrste naprezanja:

Aksijalno naprezanje

Smicanje

Uvijanje

Savijanje

Izvijanje

ŠTAPOVI OPTEREĆENI NA PRITISAK

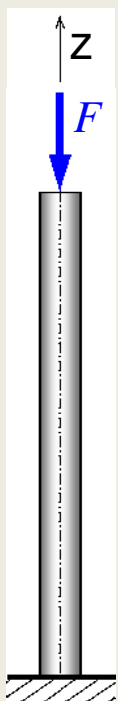
Pri projektovanju konstrukcija potrebno je osigurati njenu:

čvrstoću

krutost

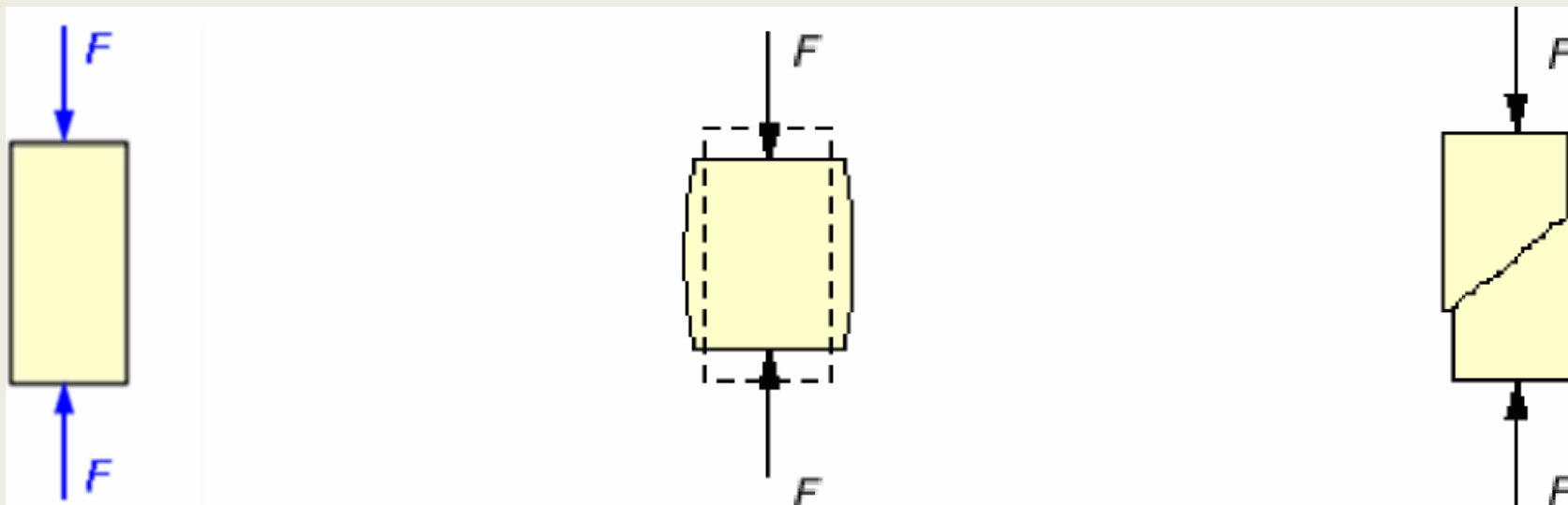
i stabilnost

Pretpostavke kod analize naprezanja i deformacije aksijalno opterećenog prizmatičnog štapa silom pritiska, prema **linearnoj teoriji (teorija prvoga reda)**:



- ❖ materijal je homogen i izotropan
- ❖ veza napona i deformacije je prema Hukovom zakonu $\sigma = E \cdot \varepsilon$
- ❖ uslovi ravnoteže se formiraju na nedeformisanoj geometriji nosača
- ❖ prav štاپ pri opterećenju ne menja oblik, tj. uzdužna osa štapa se samo skraćuje i ostaje prava \Rightarrow
deformacijska forma štapa je stabilna

Štap male vitkosti:



Duktilni materijal

$$F = F_{kr} = A \cdot \sigma_T$$

Krti materijal

$$F = F_{kr} = A \cdot \sigma_M$$

Dimenzionisanje:

Uslov nosivosti: $\sigma_z = \frac{F}{A} \leq \sigma_{dop} = \frac{\sigma_T}{f_T}$ ili $\frac{\sigma_M}{f_M}$

Uslov deformacije: $\Delta l = \frac{F \cdot l}{E \cdot A} \leq \Delta l_{dop}$

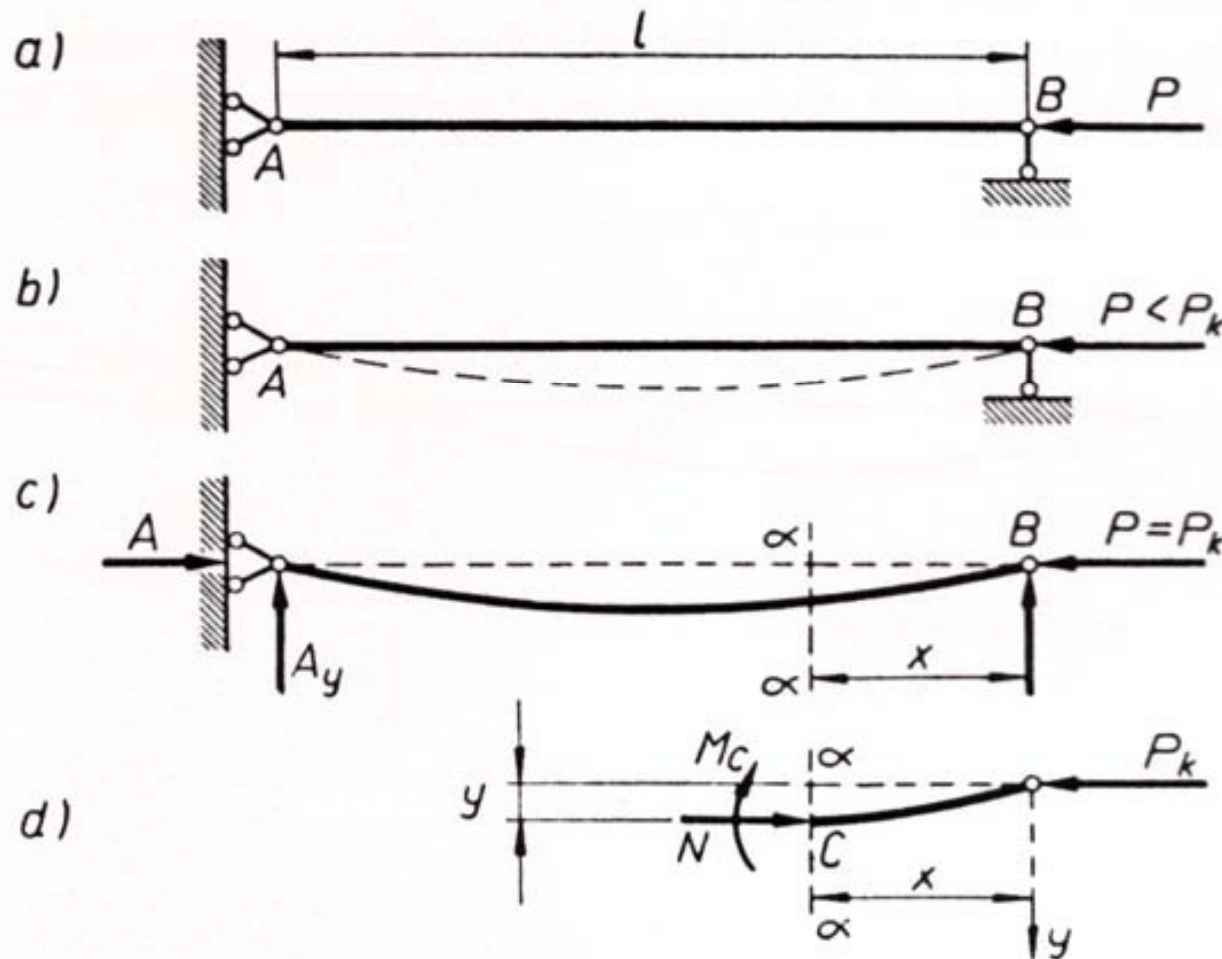
Kod **vitkih** štapova **aksijalna sila pritiska** može izazvati i **savijanje IZVIJANJE** štapa
prava deformacijska ravnotežna forma štapa je **nestabilna**.

Kritična sila izvijanja \Rightarrow

sila kod koje dolazi do pojave nestabilnih deformacijskih formi.



IZVIJANJE PRIZMATIČNOG ŠTAPA EULEROVA KRITIČNA SILA IZVIJANJA



stabilna ravnoteža

nestabilna ravnoteža

pojava momenta
savijanja

Izvijanje štapa u elastičnoj oblasti

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 E \cdot I_{min}}{(l_0)^2}$$

gde su:

P_{kr} - kritična sila izvijanja

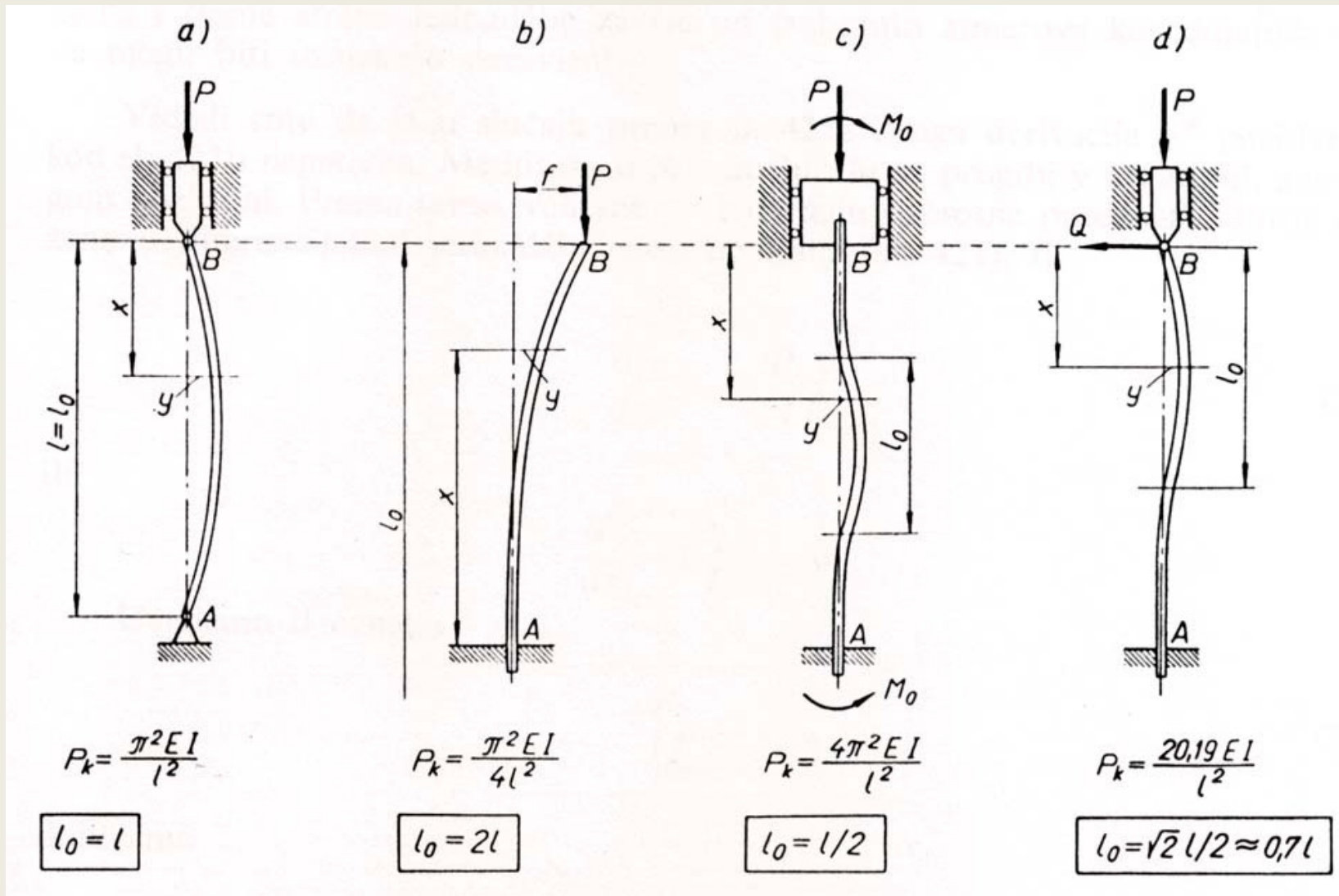
E – modul elastičnosti

I_{min} – minimalni aksijalni momenat inercije

l_0 – dužina izvijanja

Dužina izvijanja štapa zavisi od dužine štapa i od načina oslanjanja štapa. Ojler je definisao četiri osnovne dužine izvijanja

Prema načinu učvršćenja krajeva štapa razlikujemo četiri osnovna slučaja izvijanja (a, b, c i d).



Kritični napon izvijanja

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 E \cdot I_{\min}}{(l_0)^2} \quad ; \quad \sigma_{kr} = \frac{P_{kr}}{A}$$

$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 E \cdot I_{\min}}{A \cdot (l_0)^2} \quad i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} \rightarrow i_{\min}^2 = \frac{I_{\min}}{A}$$

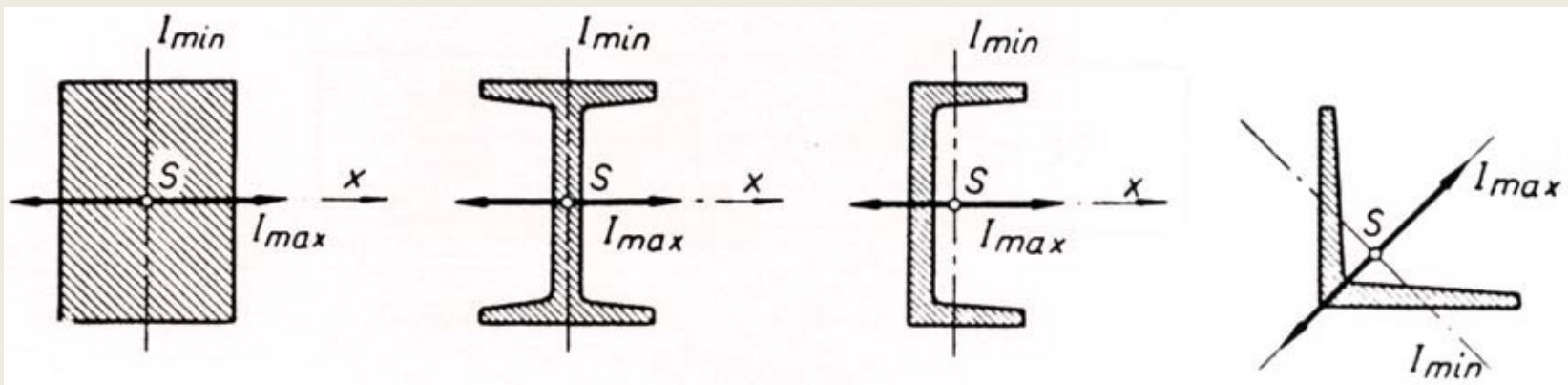
$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 E \cdot i_{\min}^2}{(l_0)^2} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{l_0}{i_{\min}}\right)^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad \lambda = \frac{l_0}{i_{\min}}$$

gde je:

λ - vitkost štapa

i_{\min} – minimalni poluprečnik inercije

Vitkost štapa, u praktičnom računanju, određujemo tako da, kod poprečnih presjeka štapa koji imaju različite momente inercije u odnosu na glavne ose, u račun uzmemo manji moment inercije jer tako dobijamo veću proračunsku vitkost:



Granična vitkost

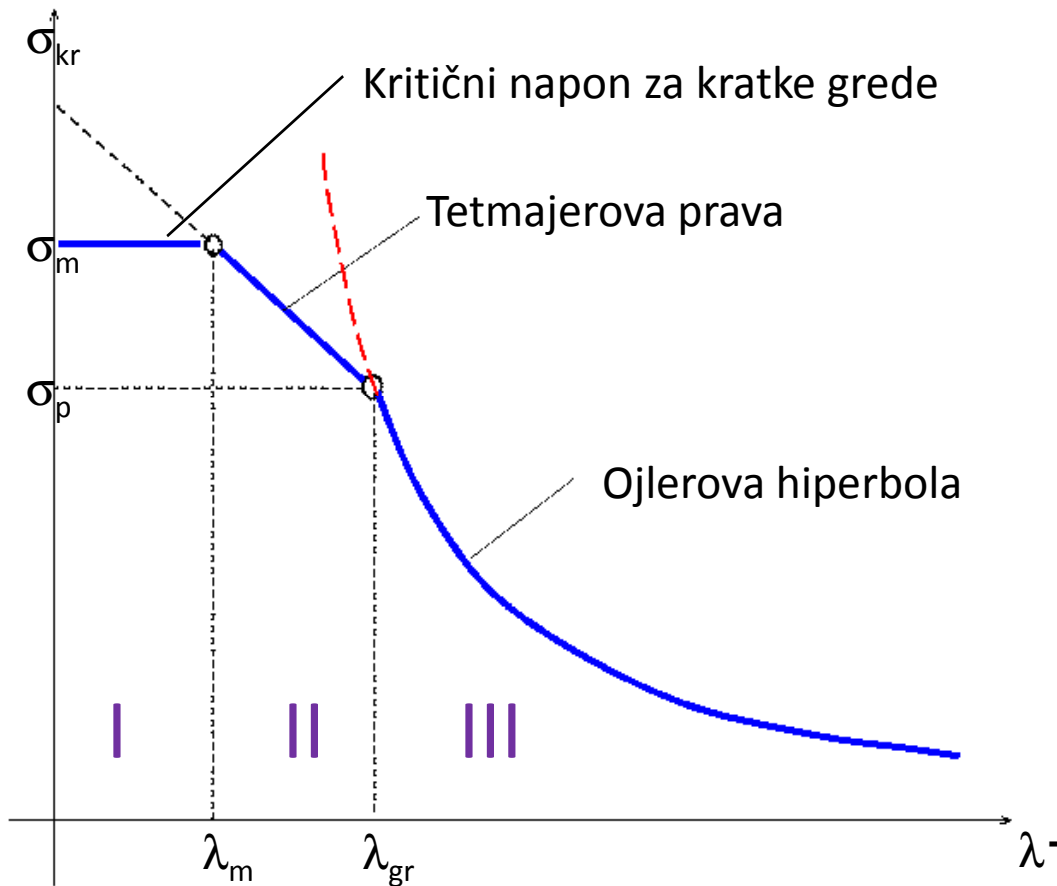
$$\lambda_{gr} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_p}}$$

gde je:

λ_{gr} - granična vitkost štapa

σ_p - granica proporcionalnosti materijala

Dimenzionisanje



I. područje: $\lambda < \lambda_m$
Štapovi se proračunavaju na pritisnu čvrstocu, a izvijanje se ne uzima u obzir

II. područje: $\lambda_m < \lambda < \lambda_{gr}$
Štapovi se proračunavaju na izvijanje pomoću Tetmajerovog izraza ili nekog drugog empirijskog izraza.

III. područje: $\lambda_{gr} < \lambda$
Štapovi se proračunavaju na izvijanje pomoću Ojlerovog obrasca

Eksperimentalni obrasci za kritičan napon izvijanja

Materijal	λ_m	λ_{gr}	σ_{kr} (kN/cm ²)	
			$0 < \lambda < \lambda_m$	$\lambda_m < \lambda < \lambda_{gr}$
Čelik (JUS Č. 0370)	60	100	24	$28.9 - 0.082\lambda$
Čelik (JUS Č. 0545)	60	100	31.2	$46.9 - 0.262\lambda$
Liveno gvoždje	0	80	76.1	$76.1 - 1.18\lambda + 0.0052\lambda^2$
Drvo (četinari)	0	60	4	$4 - 0.02\lambda$

Koeficijenti sigurnosti

$$\sigma_{izv} = \frac{\sigma_{kr}}{n_{izv}}$$

Najviše dopušteni napon koji se može desiti u gredi

kontrola napona se sprovodi prema

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq \sigma_{izv} = \frac{\sigma_{kr}}{n_{izv}}$$

ω -postupak

$$\sigma_{\text{izv}} = \frac{\sigma_{\text{dop}}}{\omega}$$

σ_{dop} -dopušteni napon kada nema izvijanja

ω -koeficijent izvijanja koji zavisi od vitkosti grede i koji je za razne materijale eksperimentalno određen ($\omega > 1$)

kontrola napona se sprovodi prema

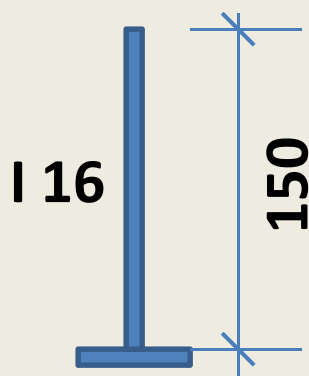
$$\sigma = \frac{F}{A} \leq \frac{\sigma_{\text{dop}}}{\omega}$$

vrednosti koeficijenta izvijanja ω

λ_2	Čelik 0370	Čelik 0545	Drvo	Liveno gvožđe
0	1,00	1,00	1,00	1,00
10	1,01	1,01	1,09	1,01
20	1,02	1,03	1,20	1,05
30	1,05	1,07	1,33	1,11
40	1,10	1,13	1,47	1,22
50	1,17	1,22	1,65	1,39
60	1,26	1,35	1,87	1,67
70	1,39	1,54	2,14	2,21
80	1,59	1,85	2,49	3,50
90	1,88	2,39	2,95	4,43
100	2,36	3,55	3,60	5,45
110	2,86	4,29	4,43	-
120	3,40	5,11	5,36	-
130	4,00	5,99	6,39	-
140	4,63	6,95	7,53	-
150	5,32	7,98	8,78	-
160	6,05	9,08	-	-
170	6,83	10,25	-	-
180	7,66	11,49	-	-
190	8,53	12,80	-	-
200	9,46	14,18	-	-

8.1 Odrediti kritičnu silu izvijanja grede na slici

$E=21 \text{ MN/cm}^2$ $\lambda_{gr}=100$ $l=150 \text{ cm}$ Profil NP I 16



Rešenje

Iz tablica za I 16 čitamo geometrijske karakteristike

$$I_{\min}=54,7 \text{ cm}^4 \quad A=22,80 \text{ cm}^2 \quad i_{\min}=1,55 \text{ cm}$$

Određivanje vitkosti:

$$\lambda = \frac{l_0}{i_{\min}}$$

dužina izvijanja (Ojler):

$$l_0=2 \cdot l=2 \cdot 150=300 \text{ cm}$$

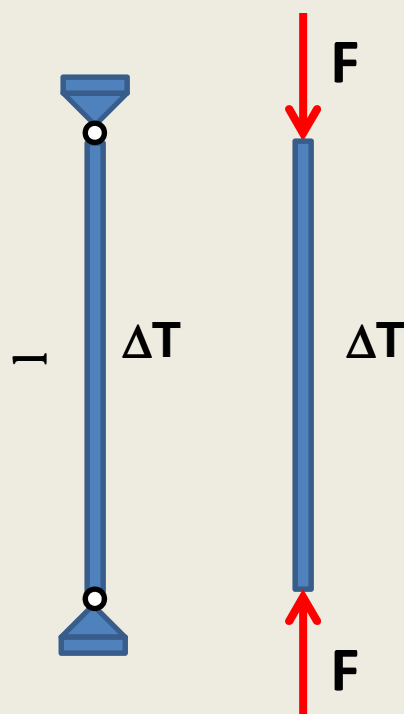
$$\lambda = \frac{l_0}{i_{\min}} = \frac{300}{1,55} = 193,5 > \lambda_{gr}$$

kritična sila izvijanja je:

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 E \cdot I_{\min}}{(l_0)^2} = \frac{\pi^2 \cdot 21 \cdot 10^3 \cdot 54,7}{300^2} = 125,97 \text{ kN}$$

8.2 Vitki štap je vezan za nepomične oslonce. Odrediti prirast temperature ΔT koje će izazvati izvijanje štapa

Dato: l , I , A , α_t



Rešenje

ukupno izduženje jednako nuli

izduženje usled temperature $\Delta l = \alpha_t \cdot l \cdot \Delta T$

izduženje usled sile

$$\Delta l = \frac{F \cdot l}{E \cdot A}$$

$$\frac{F \cdot l}{E \cdot A} - \alpha_t \cdot l \cdot \Delta T = 0$$

$$E \cdot A \cdot \alpha_t \cdot \Delta T = F \quad F = F_{kr}$$

$$E \cdot A \cdot \alpha_t \cdot \Delta T = \frac{\pi^2 E \cdot I}{l^2} \rightarrow \Delta T = \frac{\pi^2 \cdot I}{l^2 \cdot A \cdot \alpha_t}$$

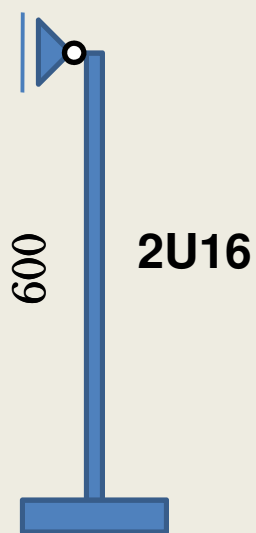
za $l=100$ cm $d=3$ cm $\alpha_t=1,25 \cdot 10^{-5}$ 1/C

$$\Delta T = 44,4^\circ \text{C}$$

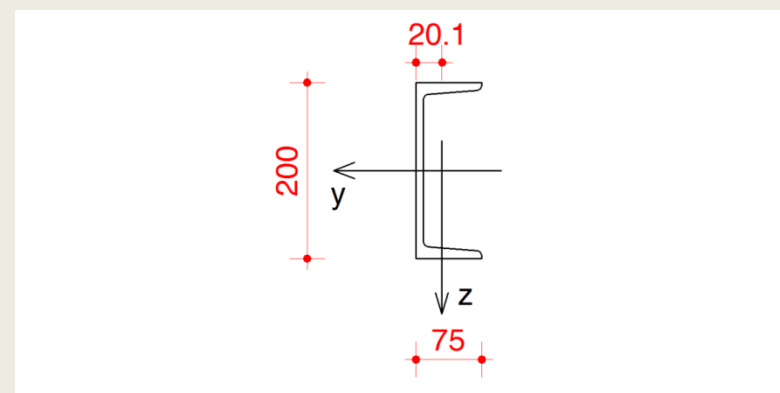
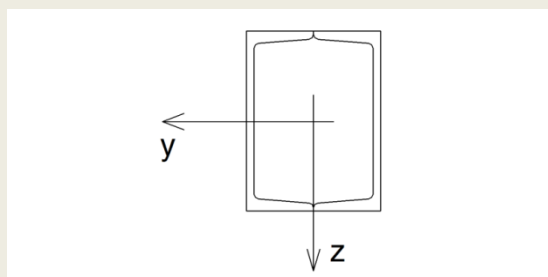
8.2 Odrediti nosivost čeličnog stuba od 2U20 profila. Stub je statičkog sistema kao na slici.

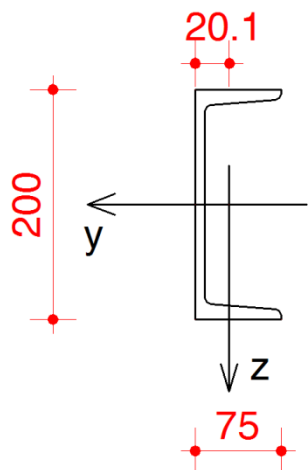
a) Određivanjem kritičnog napona izvijanja ako je koeficijent sigurnosti $n_{izv}=2,2$

b) Po ω postupku ako je $\sigma_{dop}=16 \text{ kN/cm}^2$



profil štapa 2U20





Za U 200 iz tablica imamo

$$A=32.2 \text{ cm}^2$$

$$W_y=191 \text{ cm}^3$$

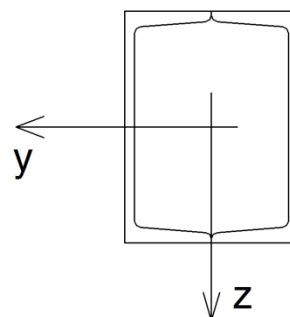
$$W_z=27 \text{ cm}^3$$

$$I_y=1910 \text{ cm}^4$$

$$I_z=148 \text{ cm}^4$$

$$i_y=7.70 \text{ cm}$$

$$i_z=2.14 \text{ cm}$$



Za 2 U 200 iz tablica imamo

$$A=32.2 * 2=64.40 \text{ cm}^2$$

$$W_y=191 * 2=382 \text{ cm}^3$$

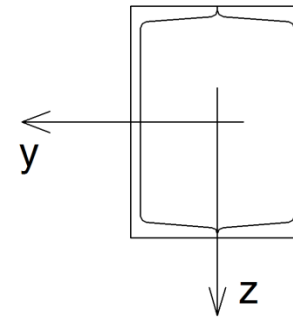
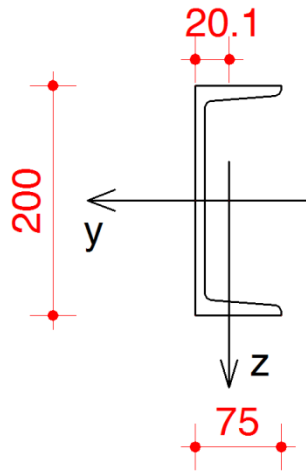
$$W_z=299 \text{ cm}^3$$

$$I_y=1910 * 2=3820 \text{ cm}^4$$

$$I_z=2240 \text{ cm}^4$$

$$i_y=7.70 \text{ cm}$$

$$i_z=5.89 \text{ cm}$$



Kako dobijamo vrednosti za 2U200

1. Računamo momenat inercije za osu z za ukupno težište koje je sada na polovini profila

$$I_z = 2I_z^S + 2 \cdot A_1 (7.5 - 2.01)^2 = 2 \cdot 148 + 2 \cdot 32.2 \cdot 5.49^2 = 2237 \text{cm}^4$$

Otporni momenat je

$$W_z = I_z / b = 2237 / 7.5 = 298 \text{cm}^3$$

Poluprečnik inercije je

$$i_z = \sqrt{I_z / A} = \sqrt{2237 / 64.4} = 5.89 \text{cm}$$

Minimalni poluprečnik inercije je

$$i_z = i_{\min} = 5.89 \text{ cm} \quad l_0 = 0,7 \cdot 600 = 420 \text{ cm}$$

$$\lambda = \frac{l_0}{i_{\min}} = \frac{420}{5,89} = 71,30 < \lambda_{\text{gr}} = 100$$

$$\sigma_{\text{kr}} = 289 - 0,82 \cdot \lambda = 289 - 0,82 \cdot 71,3 = 230,53 \text{ MPa}$$

$$F_{\text{kr}} = \frac{\sigma_{\text{kr}} \cdot A}{n_{\text{izv}}} = \frac{23,05 \cdot 64,4}{2,2} = 674,74 \text{ kN}$$

b) ω postupak

$$\lambda = 71,30 \rightarrow \omega = 1,41$$

$$F_{\text{kr}} = \frac{\sigma_{\text{dop}} \cdot A}{\omega} = \frac{16 \cdot 64,4}{1,41} = 730,78 \text{ kN}$$